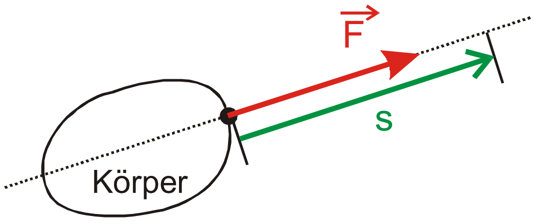
4 ARBEIT UND LEISTUNG

4.1 Mechanische Arbeit

4.1.1 Definition der Arbeit

Wenn ein Körper unter der Einwirkung einer **konstanten Kraft** $\vec{F}$ die Strecke s **in Wegrichtung** zurücklegt, dann wird an ihm die Arbeit W verrichtet. Es gilt:

$$\boxed{W = F \cdot s}$$



W: Arbeit der Kraft $\vec{F}$

F: Betrag der Kraft $\vec{F}$

s: zurückgelegte Strecke

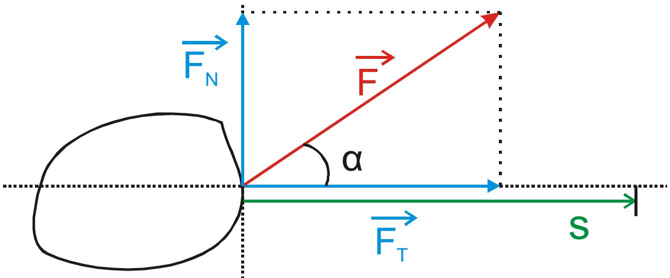
4.1.2 Einheit der Arbeit

Die SI-Einheit der Arbeit ist das **Joule** (Einheitszeichen: J, zu Ehren von James Prescott Joule, 1818 – 1889, britischer Physiker):

$$[\mathrm{W}] = [\mathrm{F}] \cdot [\mathrm{s}] = 1\,\mathrm{N} \cdot 1\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{J}$$

Wenn eine Kraft von 1 N an einem Körper wirkt und diese Kraft ihren Angriffspunkt um 1 m in Wegrichtung verlagert, dann wird an diesem Körper eine Arbeit von 1 J verrichtet.

4.1.3 Wenn die Kraft nicht in Wegrichtung wirkt



α: Winkel zwischen Kraft und Weg

Die Kraft $\vec{F}$ kann in 2 Komponenten zerlegt werden: eine **tangentiale Komponente** $\vec{F}_T$ (*parallel* zur Wegrichtung) und eine **normale Komponente** $\vec{F}_N$ (*senkrecht* zur Wegrichtung)

$$\boxed{\vec{F} = \vec{F}_T + \vec{F}_N} \,*$$

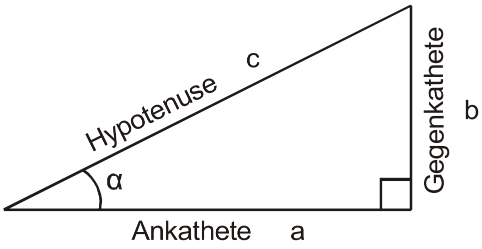
Um die Arbeit der Kraft $\vec{F}$ zu berechnen muss die Komponente benutzt werden die **in Wegrichtung** wirkt. Daher gilt:

$$\boxed{W(\vec{F}) = F_T \cdot s}$$

Durch Benutzen der trigonometrischen Funktionen kann man auch schreiben:

$$\boxed{W(\vec{F}) = F \cdot s \cdot \cos\alpha} \,*$$

Anmerkung **: Im rechtwinkligen Dreieck gilt: (trigonometrische Funktionen)



$$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c}$$

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{b}{a}$$

Beispiel: Unter der Annahme, dass α = 25° und c = 8 cm kann a berechnet werden:

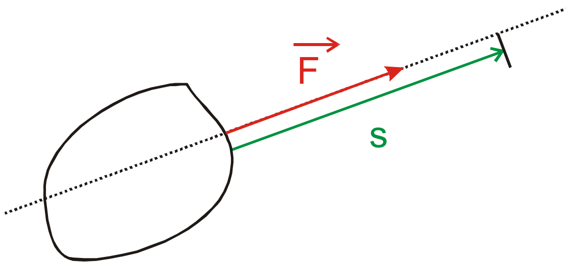
$$\cos\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\Leftrightarrow a = c \cdot \cos\alpha = 8\,\text{cm} \cdot \cos 25° = 8\,\text{cm} \cdot 0{,}9063 = 7{,}25\,\text{cm}$$

Eine ähnliche Rechnung kann natürlich auch mit Kräften durchgeführt werden.

4.1.4 Spezialfall: die Kraft wirkt in Wegrichtung *

In diesem Fall gilt: $\alpha = 0$.



$$W(\vec{F}) = F \cdot s \cdot \cos\alpha$$

$$W(\vec{F}) = F \cdot s \cdot \underbrace{\cos 0°}_{1}$$

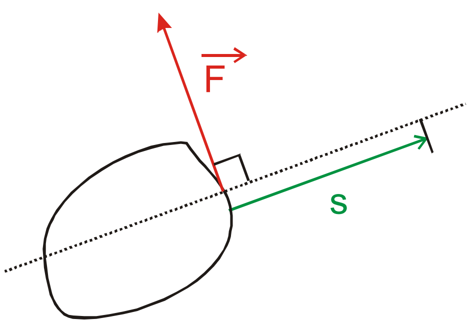
$$W(\vec{F}) = F \cdot s \cdot 1$$

$$W(\vec{F}) = F \cdot s$$

Dies entspricht der einfachen Formel, die im Abschnitt 4.1.1 diskutiert wurde. In diesem Fall ist die **Arbeit maximal**.

4.1.5 Kraft und Wegrichtung stehen senkrecht zueinander *

In diesem Fall gilt: $\alpha = 90°$.



$$W(\vec{F}) = F \cdot s \cdot \cos\alpha$$

$$W(\vec{F}) = F \cdot s \cdot \underbrace{\cos 90°}_{0}$$

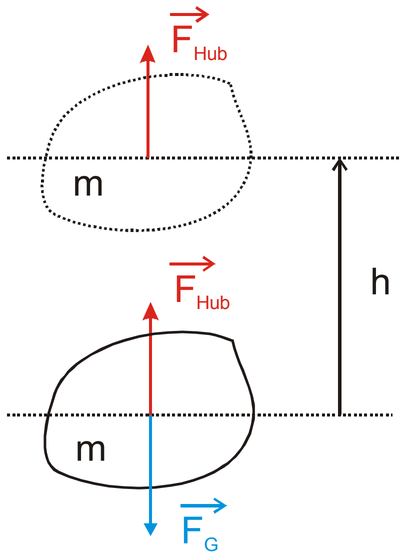
$$W(\vec{F}) = F \cdot s \cdot 0$$

$$W(\vec{F}) = 0$$

Eine senkrecht zur Wegrichtung wirkende Kraft verrichtet keine Arbeit!

4.1.6 Beispiel: Hubarbeit

Beim Heben eines Körpers um die Höhe *h* wird Hubarbeit verrichtet.



Die Figur zeigt, dass die Hubkraft in Wegrichtung wirkt und wir wissen dass beim Heben mit konstanter Geschwindigkeit der Betrag der Hubkraft dem Betrag der Gewichtskraft entspricht.

$$F_{Hub} = F_G = m \cdot g$$

Wir können daher die von der Hubkraft $\vec{F}_{Hub}$ verrichtete Arbeit einfach berechnen:

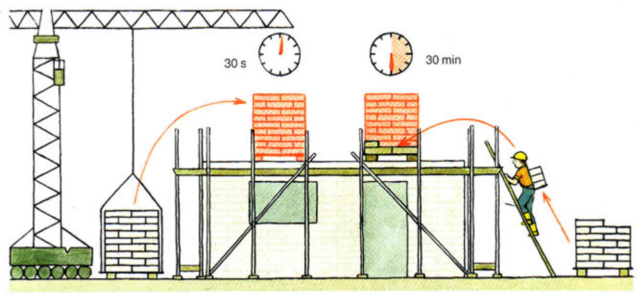
$$W_{Hub} = F_{Hub} \cdot h$$
$$W_{Hub} = F_G \cdot h$$
$$W_{Hub} = m \cdot g \cdot h$$

Daher gilt:

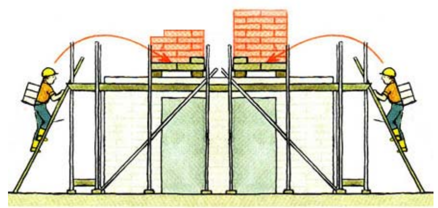
$$\boxed{W_{Hub} = m \cdot g \cdot h}$$

4.2 Mechanische Leistung

4.2.1 Definition der Leistung



Beim Verrichten der gleichen Arbeit ist die Leistung umso größer, je weniger Zeit man braucht.



Die Leistung ist umso größer, je mehr Arbeit man in einer bestimmten Zeit verrichtet.

Die mechanische Leistung wird definiert als Quotient aus der verrichteten Arbeit und der dafür benötigten Zeit.

$$\boxed{P = \frac{W}{t}}$$

P: mechanische Leistung
W: verrichtete Arbeit
t: zum Verrichten der Arbeit benötigte Zeit

Die Formel zeigt:

- $P \sim W$: wenn in der gleichen Zeit die doppelte Arbeit verrichtet wird, dann ist die mechanische Leistung doppelt so groß,
- $P \sim \frac{1}{t}$: wenn für die gleiche Arbeit die doppelte Zeit benötigt wird, dann ist die mechanische Leistung nur halb so groß.

4.2.2 Einheit der Leistung

Die SI-Einheit der Leistung ist das **Watt** (Einheitszeichen W, zu Ehren von James Watt, 1736 – 1819 schottischer Erfinder):

$$[P] = \frac{[W]}{[t]} = \frac{1\text{ J}}{1\text{ s}} = 1\text{ W}$$

Wenn eine Arbeit von 1 J in 1 s verrichtet wird, dann beträgt die Leistung 1 W.

Oft werden die folgenden dezimalen Vielfache benutzt:

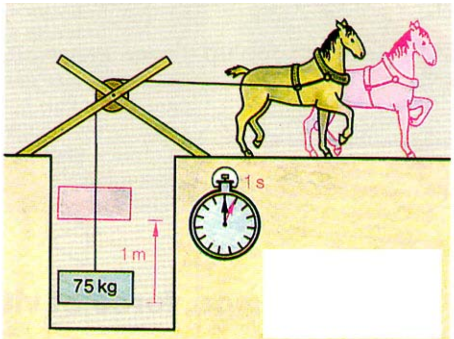
$$0{,}001\text{ W} = 1\text{ mW (Milliwatt)}$$
$$1\,000\text{ W} = 1\text{ kW (Kilowatt)}$$
$$1\,000\,000\text{ W} = 1\text{ MW (Megawatt)}$$

Anmerkung: Die Einheit **Kilowattstunde** (kWh) ist keine Einheit der Leistung! Sie ist vielmehr eine **Einheit der Arbeit**. In der Tat:

$$1\text{ kWh} = 1\text{ kW} \cdot 1\text{ h} = 1000\text{ W} \cdot 3600\text{ s} = 3\,600\,000\ \frac{\text{J}}{\text{s}} \cdot \text{s} = 3\,600\,000\text{ J} = 3{,}6\text{MJ}$$

$$\boxed{1\text{ kWh} = 3\,600\,000\text{ J} = 3{,}6\text{MJ}}$$

4.2.3 Pferdestärke PS



James Watt war der Meinung, dass ein Pferd eine Masse von 75 kg in 1 s auf eine Höhe von 1 m heben kann. Die dazugehörige Leistung definiert man als Pferdestärke.

Der Zusammenhang zwischen der Einheit Pferdestärke und der Einheit Watt kann einfach hergeleitet werden.

Es wird Hubarbeit verrichtet und es gilt die dazugehörige Leistung zu bestimmen.

$$P = \frac{W}{t} = \frac{F_{Hub} \cdot h}{t} = \frac{m \cdot g \cdot h}{t} = \frac{75\text{ kg} \cdot 9{,}81\text{ N/kg} \cdot 1\text{ m}}{1\text{ s}} = 736\text{ W}$$

Daher gilt:

$$\boxed{\begin{array}{l} 1\text{ PS} = 0{,}736\text{ kW} \\ 1\text{ kW} = 1{,}36\text{ PS} \end{array}}$$

4.2.4 Beispiel

Der Motor eines Autos hat eine Leistung von P = 110 kW. Seine Leistung in Pferdestärken entspricht dementsprechend P = 145,6 PS.

4.2.5 Zusammenhang zwischen Leistung und Geschwindigkeit *

Eine Kraft *F*, die ihren Angriffspunkt mit der Geschwindigkeit *v* parallel in Wegrichtung bewegt, verrichtet die Arbeit *W* und hat die Leistung *P*:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{F \cdot s}{t} = F \cdot \frac{s}{t} = F \cdot v$$

$$\boxed{P = F \cdot v}$$

Anmerkung: Als Geschwindigkeit *v* eines Körpers bezeichnet man den Quotienten aus der Strecke *s* die der Körper zurücklegt und der Zeit *t*, die der Körper dafür benötigt:

$$\boxed{v = \frac{s}{t}}$$

4.2.6 Beispiel *

Ein Auto fährt auf einer horizontalen Straße. Die Reibungskräfte (bedingt durch den Rollwiderstand und den Fahrtwind) betragen 500 N. Welche Leistung muss der Motor haben, damit der Wagen mit einer konstanten Geschwindigkeit von 80 km / h fährt?
Lösung:

Die Antriebskraft F_A des Autos muss die Reibungskräfte F_R überwinden. Es gilt:

$$F_A = F_R = 500 \text{ N}$$

Die den Rädern zugeführte Leistung kann also berechnet werden nach:

$$P = F_A \cdot v = 500 \text{ N} \cdot 80 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 500 \text{ N} \cdot 80 \cdot \frac{1000 \text{ m}}{3\,600 \text{ s}} = 11{,}1 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{s}} = 11{,}1 \text{ kW}$$

4.3 Zusammenfassung

Arbeit	$\boxed{W = F \cdot s}$ Einheit: **Joule** (J)	***W***: Arbeit der Kraft $\vec{F}$ ***F***: Betrag der Kraft $\vec{F}$ ***s***: zurückgelegte Strecke	
Hubarbeit	$\boxed{W_{Hub} = m \cdot g \cdot h}$	$\boldsymbol{W_{Hub}}$: Hubarbeit ***m***: Masse des gehobenen Körpers ***h***: Hubhöhe	
Leistung	$\boxed{P = \frac{W}{t}}$ Einheit: **Watt** (W)	***P***: mechanische Leistung ***W***: verrichtete Arbeit ***t***: zum Verrichten der Arbeit benötigte Zeit	
Zusatz–einheiten	$\boxed{1 \text{ kWh} = 3{,}6 \text{ MJ}}$ (Arbeit)		$\boxed{1 \text{ kW} = 1{,}36 \text{ PS}}$ (Leistung)

4.4 AUFGABEN

4.4.1 Stapeln von Quadern

Es werden 3 quaderförmige Körper von je 30 cm Höhe und einer Masse von 20 kg aufeinandergeschichtet.

a. Welche Arbeit ist dafür erforderlich?
b. Wie groß ist die Leistung wenn das Stapeln in 5 s erfolgt?

4.4.2 Holzquader

Ein Arbeiter zieht einen Holzquader (m = 50kg) über den Boden.

a. Welche Zugkraft muss er ausüben ($\mu_G = 0.5$) ?
b. Welche Arbeit verrichtet er, wenn er den Quader 150 m weit zieht?
c. Wie groß ist seine Leistung, wenn er dafür 3 Minuten benötigt?

4.4.3 Hubkran

Ein Motor hebt ein 500 kg schweres Objekt, welches an einem Seil hängt, mit einer konstanten Geschwindigkeit von 2,0 cm/s. Welche Leistung, in PS, liefert der Motor?

4.4.4 Lastwagen *

Ein Lastwagen von 10 Tonnen Masse fährt mit einer konstanten Geschwindigkeit von 60 km/h auf einer horizontalen Straße. Die Rollreibungszahl beträgt $\mu = 0,15$; zusätzlich wirkt eine Reibungskraft von 1 000 N bedingt durch den Fahrtwind. Welche Leistung muss der Motor des Lastwagens aufbringen?

4.4.5 Schlitten **

Ein Schlitten wird mittels einer Kraft mit einer konstanten Geschwindigkeit über den Boden gezogen. Die Kraft wirkt durch ein am Schlitten befestigtes Seil, das mit dem Boden einen Winkel von 39° einschließt. Die Reibungskraft beträgt 65 N

a. Berechne die erforderliche Zugkraft am Seil!
b. Berechne die verrichtete Arbeit, wenn der Schlitten 15 m weit gezogen wird!
c. Berechne die Leistung, wenn die 15 m in 20 s überwunden werden!